ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПЛЕНИЯ В МАГИСТРАТУРУ ПО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ «**ФИНТЕХ**»

Экзамен длится 180 минут.

Решите задания 1-18 и любое из заданий А1-А6 (на выбор).

Математический анализ

1. Вычислите интеграл $\int x^3 e^{x^2} dx.$

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

3. Найти минимум функции $A(x, y, z) = 2xy + 2yz + xz$ при ограничении $V(x, y, z) = xyz = 4.$

(А1) Дана функция $f(x) = \tan^{-1} x$. Найти значение $f^{(38)}(0).$

Линейная алгебра

4. Обратите матрицу $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$

5. Дано $g(x) = x^2 + 3x - 10$ и $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Найти $g(A)$.

6. Решить систему уравнений $\begin{aligned} x + 2y - 4z &= -4 \\ 2x + 5y - 9z &= -10 \\ 3x - 2y + 3z &= 11 \end{aligned}$

(А2) Доказать, что квадратическая форма $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ положительно определена тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $D = b^2 - 4ac < 0.$

Дифференциальные уравнения

7. Решите задачу Коши $y' + y = \sin x;\ y(\pi) = 1.$

8. Решите дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}.$

9. Решите дифференциальное уравнение $y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0.$

(A3) Решите задачу Коши $y'' + 4y' + 8y = \sin x;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Теория вероятностей

10. Случайная величина X имеет следующий закон распределения

x	2	4	6	8
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

с математическим ожиданием μ и среднеквадратическим отклонением σ. Найдите закон распределения, математическое ожидание и дисперсию $Z = (X - \mu)/\sigma$.

11. Пусть X – нормально распределенная случайная величина с плотностью $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-1/2(x-\mu)^2/\sigma^2]$. Докажите, что $E(X) = \mu$ и $\mathrm{var}(X) = \sigma^2.$

12. Пусть X и У – время, проводимое подростком за просмотром телевизора и домашним заданием соответственно. Известно, что совместная функция плотности имеет вид $f_{X,Y}(x,y) = xye^{-(x+y)},\quad x > 0,\quad y > 0$. Найти вероятность события, что случайно отобранный подросток будет проводить по крайней мере в два раза больше времени за телевизором по сравнению с выполнением домашнего задания.

(A4) Дана совместная функция плотности распределения вероятности $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} y^2 e^{-y(x+1)}, & x \ge 0,\quad y \ge 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$. Найдите частные (маргинальные) функции плотности для X и Y.

Математическая статистика

13. Десять измерений диаметра сферы дали среднее значение $\bar{X} = 438$ см и стандартное отклонение $s = 0.06$. Используя таблицу для t-распределения, найдите 95% доверительный интервал для диаметра.

14. Пусть $Y_1 = 0.42,\ Y_2 = 0.10,\ Y_3 = 0.65$ и $Y_4 = 0.23$ - выборка из генеральной совокупности с плотностью распределения $f_Y(y;\theta) = \theta y^{\theta-1}, \quad 0 \le y \le 1$. Оценить методом моментов значение параметра θ.
15. Найдите методом максимального правдоподобия оценку для параметра λ закона распределения Пуассона $p_X(k;\ \lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$.
(А5) Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ - выборка из генеральной совокупности с плотностью распределения $f_Y(y;\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 \le y \le \theta$. Докажите, что $\hat{\theta}_n = Y_{\max}$ является состоятельной оценкой для θ .
Эконометрика
16. Дано $\sum_{i=1}^{25} x_i = 66.075 \quad \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 174.672925$ $\sum_{i=1}^{25} y_i = 50.12 \quad \sum_{i=1}^{25} y_i^2 = 100.49865$ $\sum_{i=1}^{25} x_i y_i = 132.490725$. Найдите значения МНК-оценок для параметров a и b в линейной модели регрессии $y = a + bx$.
17. Пусть $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \ldots, (x_n, Y_n)$ - множество наблюдений, удовлетворяющих условиям линейной модели $E(Y \mid x) = \beta_0 + \beta_1 x.$ Найдите оценки максимального правдоподобия параметров $\beta_0, \beta_1,$ докажите их несмещенность, выведите формулу для $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)$.
18. Докажите, что МНК-прямая всегда проходит через точку $(\bar{X}, \bar{Y})$.

$$\sum_{i=1}^{21} x_i = 45{,}110 \qquad \sum_{i=1}^{21} y_i = 3{,}042.2$$

$$\sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 109{,}957{,}100 \qquad \sum_{i=1}^{21} y_i^2 = 529{,}321.58$$

$$\sum_{i=1}^{21} x_i y_i = 7{,}319{,}602$$

(A6) Дано . Проверьте гипотезу $H_0\colon \beta_1 = 0$ против альтернативы $H_1\colon \beta_1 > 0$ при 5% уровне значимости.